УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА МАССЫ

$$\frac{dm_j}{dt} = \frac{d_e m_j}{dt} + \frac{d_i m_j}{dt}, \qquad j = 1, 2, \ldots n$$

$$\frac{d_e m_j}{dt} = -\int \bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}_j \, dS = -\int \operatorname{div}\left(\mathbf{J}_j\right) dV$$

$$\frac{d_i m_j}{dt} = \sum_{i=1}^{r} \nu_{ji} W_i$$

$$W_i = \int w_i \, dV$$

$$m_j = \int \rho_j \, dV$$

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} = -\operatorname{div}\left(\mathbf{J}_j\right) + \sum_{i=1}^{r} \nu_{ji} w_i, \qquad j = 1, 2, \ldots n$$

СТАЦИОНАРНЫЕ ТОЧКИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Точки фазового пространства, в которых $\dot{x} = 0$ называются стационарными точками динамической системы.

$$\begin{cases} X + A \xleftrightarrow{K_1, K_2} 2X \\ X + B \xrightarrow{K_3} C \end{cases} \qquad \begin{gathered} \dot{X} = f(X) = (K_1 A - K_3 B) X - K_2 X^2 \\ f(X) = K_2 X(\alpha - X), \ \alpha = (K_1 A - K_3 B) / K_2 \end{gathered}$$

$$\frac{X}{|\alpha - X|} = R\exp(\alpha K_2 t), \ R = \frac{X_0}{|\alpha - X_0|}$$

$$\begin{cases} \alpha > 0: \ x(t \to \infty) = \alpha \\ \alpha < 0: \ x(t \to \infty) = 0 \end{cases}$$

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Для динамической системы, характеризующейся несколькими переменными, стационарная точка x^* называется **асимптотически устойчивой**, если в пределе $t \to \infty$ расстояние между точками $x(t)$ и x^* стремится к нулю.

Если при $t \to \infty$ все фазовые траектории сосредотачиваются на некотором подмножестве **А** точек фазового пространства, то такое подмножество называется **аттрактором**.

Множество точек, отвечающее началу этих фазовых траекторий называется **областью притяжения** аттрактора **А**.

СТАЦИОНАРНАЯ ТОЧКА ТИПА УЗЕЛ

$$\begin{cases} X + A \xrightarrow{K_1} P_1 \\ Y + B \xrightarrow{K_2} P_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{X} = -aX \\ \dot{Y} = -bY \end{cases}, \quad a = K_1 A,\ b = K_2 B$$

Стационарная точка: X$_*$ = Y$_*$= 0
(асимптотически устойчивая точка)

$$\begin{cases} X(t) = X(0)\exp(-at) \\ Y(t) = Y(0)\exp(-bt) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X + A \xrightarrow{K_1} 2X + P_1 \\ Y + B \xrightarrow{K_2} 2Y + P_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{X} = aX \\ \dot{Y} = bY \end{cases}, \quad a = K_1 A,\ b = K_2 B$$

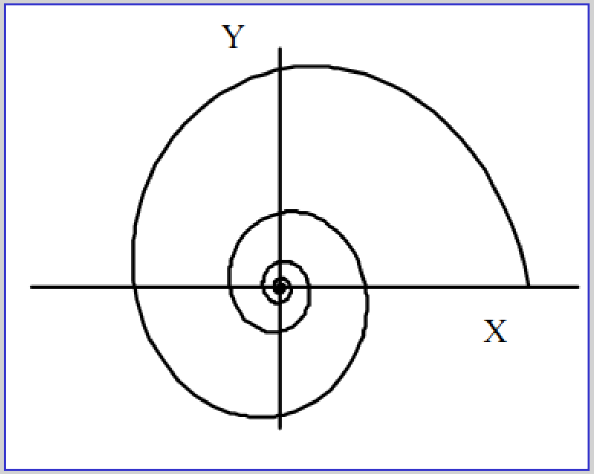
X$_*$ = Y$_*$= 0: неустойчивая стационарная точка

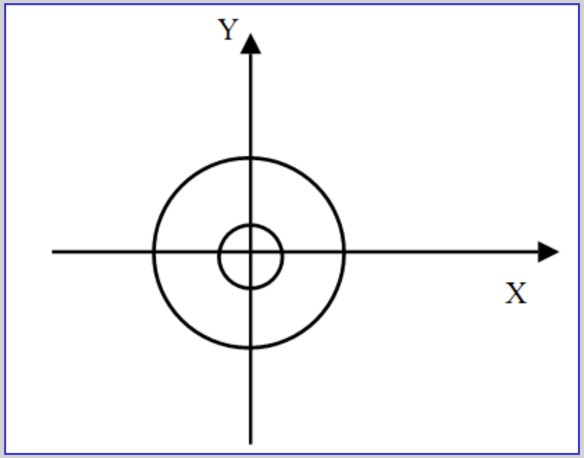
ТОЧКИ ТИПА ФОКУС И ЦЕНТР

$$\begin{cases} \dot{X} = -aX - Y \\ \dot{Y} = X - aY \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = -ar \\ \dot{\phi} = 1 \end{cases}$$

$$X = r\cos\phi, Y = r\sin\phi$$

$$\begin{cases} r(t) = c_1 \exp(-at) \\ \phi(t) = t + c_2 \end{cases}$$





АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ТОЧЕК

$$X + A \xleftrightarrow{K_1, K_2} 2X + Y$$

$$Y \xleftrightarrow{K_3, K_4} B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{X} = K_1 AX - K_2 X^2 Y \\ \dot{Y} = K_1 AX - K_2 X^2 Y - K_3 Y + K_4 B \end{cases}$$

$$X_* = 0,\ Y_* = \frac{K_4 B}{K_3}; \quad X_* = \frac{K_1 A K_3}{K_2 K_4 B},\ Y_* = \frac{K_4 B}{K_3}$$

Линеаризация уравнений

$$\begin{cases} \Delta\dot{X} = \left(K_1 A - 2K_2 X_* Y_*\right)\Delta X - K_2 X_*^2 \Delta Y \\ \Delta\dot{Y} = \left(K_1 A - 2K_2 X_* Y_*\right)\Delta X - \left(K_3 + K_2 X_*^2\right)\Delta Y \end{cases}$$

КРИТЕРИЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

$$\det\begin{pmatrix} K_1A-2K_2X_*Y_*-\lambda & -K_2X_*^2 \\ K_1A-2K_2X_*Y_* & -K_3-K_2X_*^2-\lambda \end{pmatrix}=0$$

Если все собственные значения матрицы коэффициентов линеаризованной динамической системы имеют отрицательные действительные части, то изучаемая стационарная точка является асимптотически устойчивой

$$1.\ \lambda_1=K_1A,\ \ \lambda_2=-K_3$$

$$2.\ \lambda^2+\lambda\left(a+b+K_3\right)+aK_3=0,\quad a=K_1A,\ \ b=K_2X_*^2$$

СХЕМА АНАЛИЗА ХАРАКТЕРА СТАЦИОНАРНЫХ ТОЧЕК

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X,Y) \\ \dot{Y} = G(X,Y) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} F(X,Y) = 0 \\ G(X,Y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow (X_*, Y_*)$$

$$\begin{pmatrix} F_X & F_Y \\ G_X & G_Y \end{pmatrix}_{X_*, Y_*} \Longrightarrow (\lambda_1, \lambda_2)$$

1. **λ действительные и одного знака: узел**
2. **λ действительные и разных знаков: седловая точка**
3. **$\lambda = a \pm ib$: фокус**
4. **λ чисто мнимые: центр**